ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄) - ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΪΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1) Θεωρία, Σχολικό Βιβλίο, σελ.334-335
Α2) Θεωρία, Σχολικό Βιβλίο, σελ.246
Α3) Θεωρία, Σχολικό Βιβλίο, σελ.222
Α4) **α)** Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Σωστό **δ)** Λάθος **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1) Έχουμε: $(z-2)(\bar{z}-2)+|z-2|=2 \Leftrightarrow (z-2)(\overline{z-2})+|z-2|=2 \Leftrightarrow |z-2|^2+|z-2|-2=0$

$\Leftrightarrow (|z-2|-1)(|z-2|+2)=0$

$\Leftrightarrow |z-2|=1$ ή $|z-2|=-2$ Απορρίπτεται, διότι $|z-2|\geq 0$.

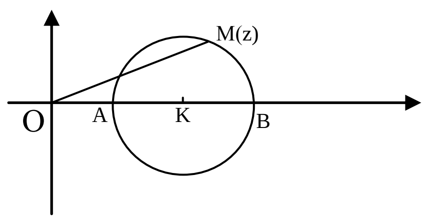
Άρα $|z-2|=1 \Leftrightarrow |z-(2+0i)|=1$, οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο Κ(2,0) και ακτίνα ρ = 1.

Θα αποδείξουμε ότι $|z|\leq 3$.

α΄ τρόπος (τριγωνική ανισότητα)
Είναι $|z|=|z-2+2|$.
Από τριγωνική ανισότητα ισχύει: $|(z-2)+2|\leq |z-2|+2 \Leftrightarrow |z|\leq 2+1 \Leftrightarrow |z|\leq 3$.

β΄ τρόπος (τριγωνική ανισότητα)
Από τριγωνική ανισότητα ισχύει: $||z|-|2||\leq |z-2| \Leftrightarrow ||z|-2|\leq 1 \Leftrightarrow -1\leq |z|-2\leq 1 \Leftrightarrow 1\leq |z|\leq 3$.
Άρα $|z|\leq 3$.

γ΄ τρόπος (γεωμετρικά)
Είναι: $(\text{OK})=\sqrt{(2-0)^2+(0-0)^2}=2>\rho$, άρα το Ο(0,0) βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου.

	Αν Μ είναι η εικόνα του μιγαδικού z, τότε |z|=(ΟΜ). Ισχύει ότι: $(\text{OA})\leq(\text{OM})\leq(\text{OB}) \Leftrightarrow$ $(\text{OK})-(\text{AK})\leq(\text{OM})\leq(\text{OK})+(\text{KB}) \Leftrightarrow$ $(\text{OK})-\rho\leq(\text{OM})\leq(\text{OK})+\rho \Leftrightarrow$ $2-1\leq \lvert z\rvert\leq 2+1 \Leftrightarrow 1\leq \lvert z\rvert\leq 3$. Άρα $\lvert z\rvert\leq 3$.

Β2) Έχουμε την εξίσωση $w^2+\beta w+\gamma=0,\ \beta,\gamma\in\mathbb{R}$ με μιγαδικές ρίζες z_1, z_2.

Ισχύει $z_2=\overline{z_1}$.

Θέτουμε $z_1=x+yi$, οπότε $z_2=x-yi$, $x,y\in\mathbb{R}$.

Δίνεται $|\mathrm{Im}(z_1)-\mathrm{Im}(z_2)|=2\Leftrightarrow|y-(-y)|=2\Leftrightarrow|2y|=2\Leftrightarrow|y|=1\Leftrightarrow y=\pm1$.

Αφού ο μιγαδικός z_1 ανήκει στον κύκλο του ερωτήματος (Β1) θα ισχύει:

$$|z_1-2|=1\Leftrightarrow|x+yi-1|=1\Leftrightarrow|(x-2)+yi|=1\Leftrightarrow\sqrt{(x-2)^2+y^2}=1\Leftrightarrow(x-2)^2+1=1\Leftrightarrow$$
$$(x-2)^2=0\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2.$$

Άρα οι μιγαδικοί είναι $z_1=2+i$ και $z_2=2-i$.

Από τους τύπους Vieta ισχύει:

$$\begin{cases}z_1+z_2=-\beta\\ z_1z_2=\gamma\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2+i)+(2-i)=-\beta\\ (2+i)\cdot(2-i)=\gamma\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2+2=-\beta\\ 2^2+1^2=\gamma\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-4\\ \gamma=5\end{cases}.$$

Β3) Αφού οι μιγαδικοί $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$ ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος (Β1) θα ισχύουν: $|\alpha_0|\le3, |\alpha_1|\le3, |\alpha_2|\le3$.

Επίσης έχουμε: $v^3+\alpha_2v^2+\alpha_1v+\alpha_0=0$ (1).

α΄ τρόπος

Από (1) $\Leftrightarrow v^3=-\left(\alpha_2v^2+\alpha_1v+\alpha_0\right)$.

Άρα $|v^3|=\left|-\left(\alpha_2v^2+\alpha_1v+\alpha_0\right)\right|\Leftrightarrow|v|^3=|\alpha_2v^2+\alpha_1v+\alpha_0|$ (2).

Από τριγωνική ανισότητα ισχύει:

$$|\alpha_2v^2+\alpha_1v+\alpha_0|\le|\alpha_2v^2|+|\alpha_1v|+|\alpha_0|=|\alpha_2|\cdot|v^2|+|\alpha_1|\cdot|v|+|\alpha_0|\le3|v|^2+3|v|+3\ (3).$$

Από (2), (3) έχουμε ότι: $|v|^3\le3|v|^2+3|v|+3\Leftrightarrow|v|^3-3|v|^2-3|v|-3\le0\Leftrightarrow|v|^3-3|v|^2-3|v|-4\le-1$.

Άρα $|v|^3-3|v|^2-3|v|-4<0\Leftrightarrow\left(|v|-4\right)\left(|v|^2+|v|+1\right)<0$ (4).

Αφού $|v|^2+|v|+1>0$, από (4) $\Leftrightarrow|v|-4<0\Leftrightarrow|v|<4$.

β΄ τρόπος

Ομοίως με πριν καταλήγουμε:

$$|v|^3\le3|v|^2+3|v|+3\Leftrightarrow|v|^3\le3\left(|v|^2+|v|+1\right)\Leftrightarrow|v|^3-1\le3\left(|v|^2+|v|+1\right)-1\Leftrightarrow$$
$$\left(|v|-1\right)\left(|v|^2+|v|+1\right)\le3\left(|v|^2+|v|+1\right)-1\Leftrightarrow|v|-1\le3-\frac{1}{|v|^2+|v|+1}\Leftrightarrow|v|\le4-\frac{1}{|v|^2+|v|+1}<4,$$

διότι $\dfrac{1}{|v|^2+|v|+1}>0$.

• Ούλοφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
• Θεοδάμαντος 2
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 180
• Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551

γ΄ τρόπος

Έχουμε $\nu^3 = -\left(\alpha_2\nu^2 + \alpha_1\nu + \alpha_0\right)$.

Αν $\nu = 0$, τότε και $\alpha_0 = 0 \Leftrightarrow |\alpha_0| = 0$, άτοπο, διότι $1 \le |\alpha_0| \le 3$. Άρα $\nu \ne 0$.

Διαιρούμε με ν^2, οπότε έχουμε:

$$\frac{\nu^3}{\nu^2} = -\left(\frac{\alpha_2\nu^2 + \alpha_1\nu + \alpha_0}{\nu^2}\right) \Leftrightarrow \nu = -\left(\alpha_2 + \frac{\alpha_1}{\nu} + \frac{\alpha_0}{\nu^2}\right).$$

Άρα $|\nu| = \left|-\left(\alpha_2 + \frac{\alpha_1}{\nu} + \frac{\alpha_0}{\nu^2}\right)\right| \Leftrightarrow |\nu| = \left|\alpha_2 + \frac{\alpha_1}{\nu} + \frac{\alpha_0}{\nu^2}\right| \le |\alpha_2| + \left|\frac{\alpha_1}{\nu}\right| + \left|\frac{\alpha_0}{\nu^2}\right| = |\alpha_2| + \frac{|\alpha_1|}{|\nu|} + \frac{|\alpha_2|}{|\nu|^2} \le 3 + \frac{3}{|\nu|} + \frac{3}{|\nu|^2}$,

οπότε έχουμε ότι $|\nu| \le 3 + \frac{3}{|\nu|} + \frac{3}{|\nu|^2}$.

Υποθέτουμε ότι ισχύει $|\nu| \ge 4$.

Τότε θα έχουμε: $|\nu| \ge 4 \Leftrightarrow \frac{1}{|\nu|} \le \frac{1}{4}$.

Επομένως: $|\nu| \le 3 + \frac{3}{|\nu|} + \frac{3}{|\nu|^2} \le 3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} = \frac{63}{16} < \frac{64}{16} = 4$. Δηλαδή $|\nu| < 4$. ΑΤΟΠΟ!

Άρα $|\nu| < 4$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\left(f(x)+x\right)\cdot\left(f'(x)+1\right)=x \Leftrightarrow 2\left(f(x)+x\right)\cdot\left(f(x)+x\right)'=2x \Leftrightarrow \left[\left(f(x)+x\right)^2\right]'=\left(2x\right)'.$$

Άρα $\left(f(x)+x\right)^2=x^2+c\ ,c\in\mathbb{R}$. (1)

Από (1) $\overset{x=0}{\Rightarrow}\left(f(0)+0\right)^2=0^2+c \Leftrightarrow 1^2=c \Leftrightarrow c=1$.

Άρα (1) $\Leftrightarrow\left(f(x)+x\right)^2=x^2+1\ ,x\in\mathbb{R}$. (2)

Αφού $x^2+1\neq 0 \Rightarrow \left(f(x)+x\right)^2\neq 0 \Rightarrow f(x)+x\neq 0$.

Δίνεται ότι η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη, οπότε είναι και συνεχής.

Επομένως η συνάρτηση $f(x)+x$ είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών .

Άρα έχουμε $\begin{cases} f(x)+x\!:\!\text{συνεχής στο}\ \mathbb{R} \\ f(x)+x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ η $f(x)+x$ έχει σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Από (2) θα έχουμε: $\left|f(x)+x\right|=\sqrt{x^2+1}$.

Αν $f(x)+x>0$, τότε $f(x)+x=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ και $f(0)=\sqrt{0^2+1}-0=1$, ισχύει.

Αν $f(x)+x<0$, τότε $f(x)+x=-\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=-\sqrt{x^2+1}-x$ και $f(0)=-1$, δεν ισχύει.

Άρα $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x, x\in\mathbb{R}$.

Γ2) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x-1=\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Είναι $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geq x \Rightarrow \sqrt{x^2+1}>x \Leftrightarrow x-\sqrt{x^2+1}<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα $f'(x)<0 \Rightarrow f:\searrow \text{στο}\,\mathbb{R} \Rightarrow f:1\!-\!1$.

Έχουμε την εξίσωση: $f\left(g(x)=1 \Leftrightarrow f\left(g(x)=f(0) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} g(x)=0\right.\right.$.

Δίνεται ότι: $g(x)=x^3+\dfrac{3x^2}{2}-1, x\in\mathbb{R}$.

Η g συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $g'(x)=3x^2+3x, x\in\mathbb{R}$.

Είναι $g'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2+3x \Leftrightarrow 3x(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0\ ή\ x=-1$.

Το πρόσημο της g΄ και η μονοτονία της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f'		+	0	−	0	+	
f		↗		↘		↗	
			Τ.Μ.		Τ.Ε.		

Είναι $g(0)=0^3+\frac{3\cdot 0^2}{2}-1=-1$, $g(-1)=(-1)^3+\frac{3\cdot(-1)^2}{2}-1=-1+\frac{3}{2}-1=-\frac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+\frac{3x^2}{2}-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+\frac{3x^2}{2}-1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$.

Βρίσκουμε το σύνολο τιμών, κάθε διαστήματος σταθερής μονοτονίας:

Είναι: $g(\Delta_1)=g((-\infty,-1])\underset{g:\nearrow}{\overset{g:\text{συνεχής}}{=}}\left(\lim\limits_{x\to-\infty} g(x), g(-1)\right]=\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$.

Είναι: $g(\Delta_2)=g([-1,0])\underset{g:\searrow}{\overset{g:\text{συνεχής}}{=}}[g(0), g(-1)]=\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$.

Είναι: $g(\Delta_3)=g([0,+\infty))\underset{g:\nearrow}{\overset{g:\text{συνεχής}}{=}}\left[g(0),\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right)=[-1,+\infty)$.

Αφού $0\notin g(\Delta_1)$ και $0\notin g(\Delta_2)$, τότε η g δεν έχει ρίζα στα διαστήματα Δ_1 και Δ_2.

Αφού $0\in g(\Delta_3)$, τότε από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε g(ρ) = 0. Το ρ είναι μοναδικό, διότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε 1-1.
Τελικά η εξίσωση g(x) = 0 έχει μοναδική ρίζα.

Γ3) Έχουμε την εξίσωση $\int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt=f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\cdot \varepsilon\varphi x_0 \Leftrightarrow \int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt-f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\cdot \varepsilon\varphi x_0=0.$

Θέτουμε $h(x)=\int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt-f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot \varepsilon\varphi x.$

Αφού $f(t)$ συνεχής, τότε η $\int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής.

Η $f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών και η εφx είναι συνεχής.

Άρα η $h(x)$ είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ ως πράξεις συνεχών.

$h\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_0^0 f(t)dt-f(0)\cdot \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}=-1<0$

$h(0)=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt-f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot \varepsilon\varphi 0=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt.$

Έχουμε αποδείξει ότι $\sqrt{x^2+1}>x\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}-x>0\Leftrightarrow f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα και $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt>0$, οπότε $h(0)\cdot h\left(\frac{\pi}{4}\right)<0$.

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα BOLZANO, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$: $h(x_0)=0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) Έχουμε f στο $(0,+\infty)$, $f(1)=1$ και ισχύει:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1-h)}{h}=0 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(1+5h)-f(1)}{h}-\frac{f(1-h)-f(1)}{h}\right]=0\,(1).$$

Είναι: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1)}{h}\underset{\substack{h\to 0\\ u\to 0}}{\overset{5h=u}{=}}\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+u)-f(1)}{\frac{u}{5}}=5\cdot\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+u)-f(1)}{u}=5f'(1)$ (2).

Είναι: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{h}\underset{\substack{h\to 0\\ u\to 0}}{\overset{-h=u}{=}}\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+u)-f(1)}{-u}=-\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+u)-f(1)}{u}=-f'(1)$ (3).

Άρα η (1) $\underset{(3)}{\overset{(2)}{\Leftrightarrow}}5f'(1)-(-f'(1))=0\Leftrightarrow 6f'(1)=0\Leftrightarrow \boxed{f'(1)=0}$.

Δίνεται ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Για $0<x<1\overset{f':\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(1)\Leftrightarrow f'(x)<0$.

Για $x>1\overset{f':\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(1)\Leftrightarrow f'(x)>0$.

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		1		$+\infty$
f'	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	$\searrow$		$\nearrow$	

Επομένως η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$, το $f(1)=1$.

Δ2) Έχουμε $g(x)=\int_{\alpha}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}dt, x>1$, $\alpha>1$.

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη, τότε η f είναι και συνεχής. Η συνάρτηση t – 1 είναι συνεχής ως πολυωνυμική, επομένως η συνάρτηση $\frac{f(t)-1}{t-1}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών.

Άρα η $g(x)=\int_{0}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ και ισχύει:

$$g'(x)=\left(\int_{0}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}dt\right)'=\frac{f(x)-1}{x-1}\ ,\ x>1.$$

Για $x>1\overset{f:\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(1)\Leftrightarrow f(x)>1\Leftrightarrow f(x)-1>0$. . Επίσης για $x>1\Leftrightarrow x-1>0$.
Άρα για κάθε x > 1 ισχύει $g'(x)>0$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

Θέτουμε $h(x)=\int_{x+5}^{x+6} g(u)du=\int_{x+5}^{\alpha} g(u)du+\int_{\alpha}^{x+6} g(u)du=\int_{\alpha}^{x+6} g(u)du-\int_{\alpha}^{x+5} g(u)du$, $x>1$.

Αφού η g είναι παραγωγίσιμη, τότε η g είναι και συνεχής, οπότε η συναρτήσεις $\int_{\alpha}^{x+6} g(u)du$, $\int_{\alpha}^{x+5} g(u)du$ είναι παραγωγίσιμες. Επομένως η h(x) είναι παραγωγίσιμη, ως διαφορά παραγωγίσιμων και ισχύει:

$$h'(x)=\left(\int_{\alpha}^{x+6} g(u)du-\int_{\alpha}^{x+5} g(u)du\right)'=g(x+6)-g(x+5).$$

Είναι $x+6>x+5\overset{g:\nearrow}{\Leftrightarrow} g(x+6)>g(x+5)\Leftrightarrow g(x+6)-g(x+5)>0\Leftrightarrow h'(x)>0$.
Άρα η h(x) είναι γνησίως αύξουσα στο (1,+∞).

Έχουμε την ανίσωση: $\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)du>\int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u)du\Leftrightarrow h\left(8x^2\right)>h\left(2x^4\right)\overset{h:\nearrow}{\Leftrightarrow}8x^2>2x^4\Leftrightarrow 2x^4-8x^2<0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2\left(x^2-4\right)<0\overset{x^2\geq 0}{\Leftrightarrow}x^2-4<0\,,x\neq 0\Leftrightarrow x^2<4\,,\ x\neq 0\Leftrightarrow |x|<2, x\neq 0\Leftrightarrow \boxed{x\in(-2,0)\cup(0,2)}$.

Δ3) Η g΄(x) είναι παραγωγίσιμη, ως πηλίκο παραγωγίσιμων και ισχύει:

$$g''(x)=\left(\frac{f(x)-1}{x-1}\right)'=\frac{f'(x)(x-1)-\left(f(x)-1\right)}{(x-1)^2}=\frac{f'(x)(x-1)-\left(f(x)-f(1)\right)}{(x-1)^2}=\frac{f'(x)-\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}}{x-1},\ x>1.$$

Η f είναι συνεχής στο [1,x]
Η f είναι παραγωγίσιμη στο (1,x)
Επομένως, σύμφωνα με το ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,x)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

Είναι $1<\xi<x\overset{f':\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi)<f'(x)\Leftrightarrow \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}<f'(x)\Leftrightarrow f'(x)-\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}>0$.
Επίσης για $x>1\Leftrightarrow x-1>0$, οπότε ισχύει $g''(x)>0$. Άρα η g είναι κυρτή στο (1,+∞).

Έχουμε την εξίσωση:

$$(\alpha-1)\cdot\int_{\alpha}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}dt=\left(f(\alpha)-1\right)\cdot(x-a)\overset{\alpha>1}{\Leftrightarrow}\int_{\alpha}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}dt=\frac{f(\alpha)-1}{x-1}\cdot(x-a)\Leftrightarrow g(x)=g'(\alpha)(x-\alpha),\ x>1.$$

Θα αποδείξουμε ότι έχει μοναδική λύση.

α΄ τρόπος
Είναι $\Leftrightarrow g(x)-g'(\alpha)(x-\alpha)=0$.
Θέτουμε $\omega(x)=g(x)-g'(\alpha)(x-\alpha), x>1$.
Είναι $\omega'(x)=g'(x)-g'(\alpha), x>1$.
Είναι $\omega''(x)=g''(x)>0$. Άρα η ω΄(x) είναι γνησίως αύξουσα στο (1,+∞).
Επίσης ισχύει: $\omega'(\alpha)=g'(\alpha)-g'(\alpha)=0$.

Για $1 < x < a \overset{\omega':\nearrow}{\Leftrightarrow} \omega'(x) < \omega'(\alpha) \Leftrightarrow \omega'(x) < 0$.

Για $x > a \overset{\omega':\nearrow}{\Leftrightarrow} \omega'(x) > \omega'(\alpha) \Leftrightarrow \omega'(x) > 0$.

Το πρόσημο της ω' και η μονοτονία της ω φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	1		α		$+\infty$
ω'	‖	−	0	+	
ω	‖	↘		↗	

Παρατηρούμε ότι $\omega(\alpha) = g(\alpha) - g'(\alpha)(\alpha - \alpha) = g(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha} \frac{f(t)-1}{t-1} dt = 0$

Για $1 < x < a \overset{\omega:\searrow}{\Leftrightarrow} \omega(x) > \omega(\alpha) \Leftrightarrow \omega(x) > 0$.

Για $x > a \overset{\omega:\nearrow}{\Leftrightarrow} \omega(x) > \omega(\alpha) \Leftrightarrow \omega(x) > 0$.

Άρα η μοναδική ρίζα της ω(x) είναι η x = α.

β΄ τρόπος

Έχουμε την εξίσωση $g(x) = g'(\alpha)(x - \alpha)$ η οποία έχει προφανή ρίζα την x = α.

Η εφαπτομένη της C_g στο x_0 = α, έχει εξίσωση:

$y - g(\alpha) = g'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow y = g'(\alpha)(x - \alpha)$.

Αφού η g είναι κυρτή, τότε θα ισχύει: $g(x) \geq y_{\varepsilon\varphi} \Leftrightarrow g(x) \geq g'(\alpha)(x - \alpha)$.

Η ισότητα ισχύει μόνο για το σημείο επαφής, δηλαδή μόνο για x = α.

Επομένως η εξίσωση $g(x) = g'(\alpha)(x - \alpha)$, έχει μοναδική ρίζα την x = α.